Mødet den 20de Marts.

Herr Vandinspecteur *Colding* gav følgende

Fremstilling af en approximeret Mindste-Qvadrat-Methode.

Anvendelsen af de mindste Qvadraters Methode medfører som bekjendt i Almindelighed, og navnlig naar de ved Observationerne fundne Talværdier indeholde flere Ziffre, meget vidtløftige Beregninger, hvilket foranlediger at denne forøvrigt fortrinlige Methode langtfra benyttes saa ofte som ønskeligt vilde være. I mangfoldige Tilfælde er den størst mulige Grad af Nøiagtighed ingenlunde af særdeles Vigtighed, skjøndt det paa den anden Side er ganske naturligt, at Enhver ønsker at komme Sandheden saa nær som muligt, og til den Ende at kunne drage den størst mulige Nytte af alle de til Sandhedens Erkjendelse udførte Observationer, uden dog derpaa at opoffre saamegen Tid, som Benyttelsen af de mindste Qvadraters Methode i Almindelighed udkræver. For Tiden existerer der saavidt mig bekjendt ikke nogen anden velbegrundet Methode end netop den af de mindste Qvadrater, hvorved det er muligt at bestemme Constanterne i en Formel, formedelst Resultaterne af forskjellige i den Anledning udførte Forsøg; i ethvert enkelt Tilfælde af denne Art har man kun Valget imellem at benytte denne Methode i sin fulde Vidtløftighed eller at indskrænke Constanternes Bestemmelse til en vilkaarlig Benyttelse af Forsøgene. Jeg for min Part har ofte følt denne store Mangel og jeg har derfor ogsaa længe forsøgt at udfinde en Methode, som uden at medføre saa store Vidtløftigheder som de mindste Qvadraters Methode, kunde føre til Maalet med en efter Forholdenes Natur passende Grad af Tilnærmelse, og jeg troer at det er lykkedes mig at udfinde en saadan, der baade er correct, simpel og let anvendelig, hvilken Grad af Nøiagtighed man end attraaer. En Meddelelse herom, har jeg tænkt mig, kunde muligt ogsaa interessere Andre, der ligesom jeg oftere have Brug for de mindste Qvadraters Methode.

Vi ville antage, at et Antal af variable Størrelser x, y, $z \ldots t$ afhænge af hinanden ifølge den Lov, som er udtrykt ved Ligningen:

$$x \,.\, p + y \,.\, q + z \,.\, r + \ldots - t = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hvor p, q, $r \ldots\ldots$ alle ere Constanter, som skulle bestemmes, og vi ville fremdeles antage, at der til Bestemmelsen af disse Constanter er udført n forskjellige Rækker af Observationer, der have givet følgende sammensvarende numeriske Værdier for x, y, $z \ldots\ldots t$, nemlig:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 \; \ldots\ldots & m_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \; \ldots\ldots & m_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \; \ldots\ldots & m_3 \\ & \text{etc.} & & \\ a_n & b_n & c_n \; \ldots\ldots & m_n \end{array}$$

Naar disse Værdier indsættes i Ligningen (1) erholdes følgende numeriske Ligninger:

$$\left.\begin{array}{c} a_1 p + b_1 q + c_1 r + \ldots - m_1 = 0 \\ a_2 p + b_2 q + c_2 r + \ldots - m_2 = 0 \\ a_3 p + b_3 q + c_3 r + \ldots - m_3 = 0 \\ \text{etc.} \\ a_n p + b_n q + c_n r + \ldots - m_n = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

hvor vi da maa forudsætte, at n er større end Antallet af de ubekjendte Constanter, der skulle bestemmes, da man jo ellers enten slet ikke vilde være istand til at bestemme disse Constanter, endogsaa blot med Tilnærmelse, eller dog kun vilde kunne bestemme dem med en forholdsviis ringe Grad af Nøiagtighed.

Antage vi nu forelobigt, at i Ligningerne (2) ere alle Constanterne, med Undtagelse af p bekjendte, da er det klart, at vi af disse n Ligninger vilde kunne erholde n Værdier for p, som imidlertid ikke alle vilde være at betragte som lige paalidelige; thi jo mindre Coefficienten a i en hvilkensomhelst af disse Ligninger er, desto større Indflydelse vil sandsynligviis den ved a heftende Observationsfeil udøve ved Bestemmelsen af p og desto mindre nøiagtig kan altsaa igjen p antages at blive bestemt af en saadan Ligning, og omvendt, jo større Coefficienten a er, desto mindre Indflydelse vil Observationsfeilen sandsynligviis udøve og desto nøiagtigere maa følgelig p antages at blive bestemt. Der er altsaa Sandsynlighed for, at vi ved Bestemmelsen af den ubekjendte Constant p ville nærme os Sandheden mest, naar vi betragte Coefficienterne a_1 a_2 a_3 $\ldots a_n$ i Ligningerne (2) som proportionale med de respective Ligningers Grad af Paalidelighed med Hensyn paa Bestemmelsen af p. Den Grad af Paalidelighed, som de forskjellige Ligninger i saa Henseende have, ville vi betegne respective ved A_1 A_2 $A_3 \ldots A_n$.

Men naar Graden af Paalidelighed eller Nøiagtighed er bekjendt for de forskjellige Ligninger (2), saa er det indlysende, at vi med den størst mulige Nøiagtighed ville finde p af den Endeligning, som fremkommer naar vi først multiplicere enhver af Ligningerne (2) med dens Grad af Paalidelighed (A) og derpaa addere alle de erholdte Ligninger. Udføres dette, erholdes:

$$\left.\begin{array}{c} A_1(a_1p+b_1q+c_1r+\ldots-m_1) \\ A_2(a_2p+b_2q+c_2r+\ldots-m_2) \\ A_3(a_3p+b_3q+c_3r+\ldots-m_3) \\ \text{etc.} \\ A_n(a_np+b_nq+c_nr+\ldots-m_n) \end{array}\right\} = 0,$$

hvorved maa iagttages, at enhver Coefficient A skal være positiv eller negativ eftersom a er positiv eller negativ; thi ellers vilde Coefficienterne til p tildeels ophæve hinanden, hvorved Nøiagtigheden igjen vilde formindskes.

Denne Ligning ville vi for Kortheds Skyld betegne ved:

$$\Sigma A(ap + bq + cr + \ldots - m) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Men hvad vi saaledes have anført om Bestemmelsen af p, naar $q, r \ldots$ betragtes som bekjendte, kan naturligviis ogsaa anvendes paa q, naar $p, r \ldots$ betragtes som bekjendte Størrelser, saavelsom paa r, naar $p, q \ldots$ betragtes som bekjendte, og de Resultater, som derved erholdes, kunne ligefrem udledes af Formlen (3), respective ved Ombytning af a med b, p med q og Factoren A med en dermed analog B, hvorved erholdes

$$\Sigma B(ap + bq + cr + \ldots - m) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

eller ved Ombytning af a med c, p med r og Factoren A med en dermed analog Factor C, hvorved erholdes

$$\Sigma C(ap + bq + cr + \ldots - m) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Paa denne Maade erholdes netop saamange Ligninger som der ere Ubekjendte, og derved blive disse altsaa bestemte.

Spørgsmaalet bliver nu, hvilken Grad af Sandsynlighed der er for Rigtigheden af de saaledes fundne Værdier for p, q, $r \ldots$ og Svaret derpaa bliver, at vi have den samme Grad af Sandsynlighed derfor, som vi have for, at de ved de mindste Qvadraters Methode erholdte Værdier for p, q, $r \ldots$ ere rigtige. For at bevise dette ville vi paany betragte Formlen (1) og bemærke, at naar vi i denne Formel indsætte de ved Forsøgene fundne sammensvarende Værdier for $x\ y\ z \ldots t$, saa vil Ligningen, paa Grund af de uundgaaelige Observationsfeil, i Regelen ikke blive fuldkommen tilfredsstillet, men der vil fremtræde forskjellige smaa Feil $u_1\ u_2\ u_3 \ldots u_n$ saaledes:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_1 p + b_1 q + c_1 r + \ldots - m_1 \\ u_2 &= a_2 p + b_2 q + c_2 r + \ldots - m_2 \\ u_3 &= a_3 p + b_3 q + c_3 r + \ldots - m_3 \\ &\text{etc.} \\ u_n &+ a_n p + b_n q + c_n r + \ldots - m_n \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

og Opgaven for de mindste Qvadraters Methode er da som bekjendt den, at bestemme Constanterne p, q, $r\ldots$ saaledes, at Summen af Feilenes Qvadrater, $\Sigma(u^2)=u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2+\ldots u_n{}^2$ bliver et Minimum. Til den Ende sættes altsaa

$$\frac{d\Sigma(u^2)}{dp}=0,\quad \frac{d\Sigma(u^2)}{dq}=0,\quad \frac{d\Sigma(u^2)}{dr}=0 \text{ etc.},$$

hvorved følgende Betingelsesligninger, der tjene til at bestemme Constanterne, erholdes:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(ap+bq+cr+\ldots-m)\,a=0\\ \Sigma(ap+bq+cr+\ldots-m)\,b=0\\ \Sigma(ap+bq+cr+\ldots-m)\,c=0\\ \qquad\text{etc.}\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

Sammenligne vi nu disse Ligninger (7) med de foran angivne Ligninger (3), (4), (5) etc., idet vi erindre, at alle Factorerne A, B, C etc. respective ere proportionale med de tilsvarende Coefficienter a, b, c etc., saa bliver det indlysende, at Formlerne (3), (4), (5) ... ere aldeles identiske med Formlerne (7), og det var dette som skulde bevises.

Efter saaledes at have godtgjort den opstillede Betragtningsmaades Rigtighed, føres vi videre til at indsee, at det kun vil have en forholdsviis ringe Indflydelse paa Resultatets Nøiagtighed, om vi, istedetfor at tage Factorerne A, B, C etc. fuldkomment proportionale med de respective Coefficienter a, b, c etc., blot tage dem tilnærmelsesviist proportionale med disse Coefficienter, skjøndt det paa den anden Side er klart, at Feilen, som derved begaaes er i samme Grad mindre, som Afvigelsen fra Proportionaliteten er mindre.

Herpaa grunder jeg *den approximative Qvadratmethode*, som bestaaer i, at vælge Factorerne A, B, C etc. tilnærmelsesviist proportionale med de respective tilsvarende Coefficienter a, b, c, etc. Methodens Simpelhed og Nytte skal jeg nærmere belyse ved et Exempel.

De numeriske Ligninger (2) være følgende:

	Factorerne for Ligningernes Grad af Paalidelighed.	
$0{,}0625 \,.\, p - 1{,}0073 \,.\, q - 0{,}0000 = 0$	$A_1 = 1$	$B_1 = -1$
$0{,}0725 \,.\, p - 1{,}0062 \,.\, q - 0{,}0100 = 0$	$A_2 = 1$	$B_2 = -1$
$0{,}0825 \,.\, p - 1{,}0000 \,.\, q - 0{,}0208 = 0$	$A_3 = 1$	$B_3 = -1$
$0{,}0925 \,.\, p - 1{,}0075 \,.\, q - 0{,}0330 = 0$	$A_4 = 1$	$B_4 = -1$
$0{,}1025 \,.\, p - 1{,}0100 \,.\, q - 0{,}0433 = 0$	$A_5 = 1$	$B_5 = -1$
$0{,}1425 \,.\, p - 1{,}0005 \,.\, q - 0{,}1008 = 0$	$A_6 = 1$	$B_6 = -1$
$0{,}1725 \,.\, p - 1{,}0041 \,.\, q - 0{,}1633 = 0$	$A_7 = 2$	$B_7 = -1$
$0{,}1925 \,.\, p - 1{,}0052 \,.\, q - 0{,}2008 = 0$	$A_8 = 2$	$B_8 = -1$
$0{,}2425 \,.\, p - 1{,}0035 \,.\, q - 0{,}2848 = 0$	$A_9 = 2$	$B_9 = -1$
$0{,}2725 \,.\, p - 1{,}0063 \,.\, q - 0{,}3305 = 0$	$A_{10} = 3$	$B_{10} = -1$
$0{,}2925 \,.\, p - 1{,}0047 \,.\, q - 0{,}3645 = 0$	$A_{11} = 3$	$B_{11} = -1$
$0{,}3125 \,.\, p - 1{,}0071 \,.\, q - 0{,}3969 = 0$	$A_{12} = 3$	$B_{12} = -1$
$0{,}3325 \,.\, p - 1{,}0062 \,.\, q - 0{,}4270 = 0$	$A_{13} = 3$	$B_{13} = -1$

Udføres først Multiplicationerne med de angivne Factorer (A), og adderes derpaa de erholdte Ligninger, erholdes, i Overeensstemmelse med Formlen (3)

$$5{,}4000 \,.\, p - 24{,}1300 \,.\, q - 6{,}0624 = 0.$$

Udføres derefter Multiplicationerne med Factorerne (B) erholdes, overeensstemmende med Formlen (4)

$$2{,}3725 \,.\, p - 13{,}0686 \,.\, q - 2{,}3757 = 0,$$

og af disse to Ligninger findes nu let, at

$$p = 1{,}6436 \text{ og } q = 0{,}1166.$$

Det kan i mange Tilfælde, ved Benyttelsen af den approximative Qvadratmethode, være af Vigtighed at kunne bestemme Grændsen for Størrelsen af den Feil, som man begaaer ved at benytte denne Methode istedetfor de mindste Qvadraters Methode. En saadan Bestemmelse medfører ingen videre Vanskelighed, og jeg skal nu udvikle de Formler, hvorved Grændsen for Feilen kan bestemmes.

Ved den practiske Anvendelse af den approximative Qvadrat-Methode antager jeg, at man i Regelen vil vælge $A = g(a \pm \alpha)$, $B = h(b \pm \beta)$, $C = k(c \pm \gamma) \ldots$ hvor $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ere Størrelser, der ikke overskride visse bestemte Grændser $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \ldots$, og hvor $g, h, k, \ldots$ alle ere Potentser af Tallet 10*).

Idet vi nu gaae ud herfra, saa ville vi fremdeles antage, at alle Afvigelserne (α) gaae i samme Retning, altsaa enten alle ere positive eller alle ere negative, samt at de ligeledes alle have deres største Værdi α_0, thi i dette Tilfælde er det let indlysende, at Feilen p' i Bestemmelsen af p bliver et Maximum. Den samme Forudsætning, som vi her have udviklet for α med Hensyn paa Bestemmelsen af Feilen p', ville vi ogsaa gjøre for enhver af de andre Størrelser $\beta, \gamma \ldots$ med Hensyn paa Bestemmelserne af de Feil $q', r' \ldots$, som begaaes ved at vælge den approximative Methode, istedetfor at bestemme $p, q, r \ldots$ ved de mindste Qvadraters Methode.

Constanterne $p, q, r \ldots$ bestemmes ifølge de mindste Qvadraters Methode ved Formlerne (7). Antages nu, at vi istedetfor Factorerne $(a), (b), (c), \ldots$ benytte Factorerne $(a - \alpha_0)$, $(b - \beta_0)$, $(c - \gamma_0), \ldots$ saa ville vi for Constanterne erholde Værdierne $(p + p')$, $(q + q')$ og $(r + r')$ og Ligningen (7) kunde altsaa skrives:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(a - \alpha_0)\big(a(p+p') + b(q+q') + c(r+r') + \ldots - m\big) &= 0 \\ \Sigma(b - \beta_0)\big(a(p+p') + b(q+q') + c(r+r') + \ldots - m\big) &= 0 \\ \Sigma(c - \gamma_0)\big(a(p+p') + b(q+q') + c(r+r') + \ldots - m\big) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

etc.

Tænke vi os fremdeles Constanterne i Ligningerne (2) at være bestemte ifølge den approximative Methode, saa ere altsaa $(p + p')$, $(q + q')$, $(r + r')$ bekjendte. Indsætte vi disse i Summen af Ligningerne (6), saa finde vi ogsaa let Summen af alle Feilene:

$$\Sigma(u) = \Sigma\big(a(p+p') + b(q+q') + c(r+r') + \ldots - m\big) \ldots . \quad (9)$$

Men opløse vi Ligningerne (8) i deres enkelte Dele, og

*) I det betragtede Exempel er saaledes $g = 10$, $h = 1$, $\alpha_0 = 0{,}05$ og $\beta_0 = 0{,}01$.

tage vi Hensyn til Formlerne (7) og (9), saa finde vi let følgende Betingelsesligninger til Bestemmelse af Feilene $p', q', r', \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma a(ap'+bq'+cr'+\ldots)-\alpha_0 . \Sigma(u)=0 \\ \Sigma b(ap'+bq'+cr'+\ldots)-\beta_0 . \Sigma(u)=0 \\ \Sigma c(ap'+bq'+cr'+\ldots)-\gamma_0 . \Sigma(u)=0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

hvoraf det strax fremgaaer, at Feilene $p', q', r' \ldots$ alle ere meget smaa Størrelser, da de ere proportionale med $\Sigma(u)$, som altid vil være meget lille. Som en Følge heraf maa vi være berettigede til ogsaa her at anvende den approximative Methode paa Bestemmelsen af disse Størrelser. Vi erholde da følgende Betingelsesligninger, der ere overeensstemmende med Formlerne (3), (4) og (5) i det Foregaaende, nemlig:

$$\Sigma A(ap'+bq'+cr'+\ldots)-g\alpha_0\Sigma(u)=0 \quad \ldots\ldots \quad (3.a)$$

$$\Sigma B(ap'+bq'+cr'+\ldots)-h\beta_0\Sigma(u)=0 \quad \ldots\ldots \quad (4.a)$$

$$\Sigma C(ap'+bq'+cr'+\ldots)-k\gamma_0\Sigma(u)=0 \quad \ldots\ldots \quad (5.a)$$

etc.

Bestemmelsen af Grændserne for de Feil $p', q', r' \ldots$, som muligt kunne være begaaede ved at benytte den approximative Qvadratmethode istedetfor de mindste Qvadraters Methode, er altsaa baade simpel og let, særdeles naar man foretager den samtidigt med Constanternes Beregning. Ville vi saaledes bestemme Grændsen for de Feil p' og q', som muligt kunne hefte ved Constanterne $p=1,6436$ og $q=0,1166$ i det betragtede specielle Tilfælde, da finde vi først, ved at summere de numeriske Ligninger og ved derefter at indsætte Værdierne for p og q, at

$$\Sigma(u)=0,00025.$$

I dette Tilfælde have vi fremdeles $g\alpha_0=0,5$ og $h\beta_0=0,01$ og Betingelsesligningerne (3.a.) og (4.a.) blive altsaa

$$\left.\begin{array}{l} 5,4000 . p'-24,1300 . q'-0,00125=0 \text{ og} \\ 2,3725 . p'-13,0686 . q'-0,000025=0, \end{array}\right\}$$

hvoraf vi finde $p'=0,00118$ og $q'=0,00021$.